

$$\begin{aligned}
K_3 &= (1 + 6\beta + 6\alpha \mp 12\alpha^2 + 8\alpha^3)/12 \\
K_4 &= \frac{\beta^3}{6} + K_2^2 + 2\alpha(\beta - K_2)^2 + 2\beta\left(\frac{\beta}{2} - K_2\right)^2 \\
K_5 &= \beta(6\alpha + 3\beta - 8\alpha^3) \frac{1}{12K_3} \\
K_6 &= \beta - K_5 \\
K_7 &= K_6 \pm 2\alpha(\beta + K_5) \\
K_8 &= \frac{K_5^2}{12} + (K_5^2 + K_6^2 - K_5K_6) \frac{\beta}{6} + (K_6^2 + K_7^2 + K_6K_7) \frac{\alpha}{6}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\Delta^5 N = \beta[3\alpha + 2\beta + \beta(2\alpha + \beta)]$$

$$\Delta^6 N = \alpha(3\beta + 1)[K_5(1 \mp 2\alpha) + K_7] + 3\beta^2(\alpha + \beta) + 2\beta^2 + 2\alpha\beta(1 \pm \alpha\beta)$$

Für die Starrkörperanteile ($k = 1$ bis $k = 4$) gilt:

Schwerpunkts- und Schubmittelpunktslage:

$$\begin{aligned}
z_S &= K_2 h \\
z_M &= (K_2 + K_5) h
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Wölbwiderstände:

$$\begin{aligned}
A &= K_1 h t = {}^1C \\
I_z &= K_3 h^3 t = {}^2C \\
I_y &= K_4 h^3 t = {}^3C \\
C_M &= K_8 h^5 t = {}^4C
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Drillwiderstände:

$$\begin{aligned}
{}^1D &= {}^2D = {}^3D = 0 \\
{}^4D &= \frac{1}{3} K_1 h t^3 = I_D
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Wölbordinaten:

(oberes Vorzeichen für C-, unteres für Hut-Profil)

$$\begin{aligned}
 k = 1 : \quad & {}^1u_1 = {}^1u_2 = {}^1u_3 = {}^1u_4 = {}^1u_5 = {}^1u_6 = -1 \\
 k = 2 : \quad & {}^2u_1 = -{}^2u_6 = -\left(\frac{1}{2} \mp \alpha\right)h \\
 & {}^2u_2 = {}^2u_3 = -{}^2u_4 = -{}^2u_5 = -\frac{1}{2}h \\
 k = 3 : \quad & {}^3u_1 = {}^3u_2 = {}^3u_5 = {}^3u_6 = -(\beta - K_2)h \\
 & {}^3u_3 = {}^3u_4 = K_2h \\
 k = 4 : \quad & {}^4u_1 = -{}^4u_6 = K_7\frac{1}{2}h^2 \\
 & {}^4u_2 = -{}^4u_5 = (\beta - K_5)\frac{1}{2}h^2 \\
 & {}^4u_3 = -{}^4u_4 = -K_5\frac{1}{2}h^2
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Für den symmetrischen Profilverformungszustand ($k = 5$) gilt:

Wölbordinaten:

$$\begin{aligned}
 {}^5u_1 = {}^5u_6 &= 1 \\
 {}^5u_2 = {}^5u_5 &= -\alpha\beta(3 + 2\beta)\frac{1}{\Delta^{5N}} \\
 {}^5u_3 = {}^5u_4 &= \alpha\beta^2\frac{1}{\Delta^{5N}}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Scheibenverdrehungen:

(oberes Vorzeichen für C-, unteres für Hut-Profil)

$$\begin{aligned}
 {}^5f_{\vartheta,1} = -{}^5f_{\vartheta,5} &= \pm(1 - {}^5u_2) \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha(3 + 2\beta)} \right) \frac{1}{h^2} \\
 {}^5f_{\vartheta,2} = -{}^5f_{\vartheta,4} &= \pm \left(\frac{1 - {}^5u_2}{\alpha\beta} \right) \frac{1}{h^2} \\
 {}^5f_{\vartheta,3} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Querbiegemoment:

$${}^5m_{s,3} = \frac{2 \cdot {}^5f_{\vartheta,2}}{\left(\frac{2}{3}\beta + 1\right)h} K \quad (K \text{ ist die Plattensteifigkeit}) \tag{5.8}$$

Wölbwiderstand, Querbiegewiderstand und Drillwiderstand:

$$\begin{aligned}
 {}^5C &= \int_s {}^5u^2 t \, ds \\
 &= \frac{2}{3} \left(\alpha(1 + {}^5u_2 + {}^5u_2^2) + \beta({}^5u_2^2 + {}^5u_2 \cdot {}^5u_3 + {}^5u_3^2) + \frac{3}{2} \cdot {}^5u_3^2 \right) ht \\
 {}^5B &= \left(\frac{2}{3}\beta + 1 \right) \frac{{}^5m_3^2}{K} h \\
 {}^5D &= \frac{2}{3} \left(\alpha \cdot {}^5f_{\vartheta,1}^2 + \beta \cdot {}^5f_{\vartheta,2}^2 \right) ht^3
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Für den antimetrischen Profilverformungszustand ($k = 6$) gilt:

Wölbordinaten:

(oberes Vorzeichen für C-, unteres für Hut-Profil)

$$\begin{aligned} {}^6u_1 &= -{}^6u_6 = 1 \\ {}^6u_2 &= -{}^6u_5 = (\pm 2\alpha(1 + 3\beta)[K_5(2\alpha \mp 1) \mp K_7] \mp \alpha\beta(4\alpha\beta \pm 1)) \frac{1}{\Delta^6 N} \\ {}^6u_3 &= -{}^6u_4 = \frac{-1}{1 + 3\beta} [\alpha(3 \mp 4\alpha) + {}^6u_2(3\alpha \mp 2\alpha^2 + 3\beta)] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Scheibenverdrehungen:

(oberes Vorzeichen für C-, unteres für Hut-Profil)

$$\begin{aligned} {}^6f_{\vartheta,1} &= {}^6f_{\vartheta,5} = \left(\pm \frac{1 - {}^6u_2 \pm 2\alpha \cdot {}^6u_3}{\alpha\beta} + \frac{\pm 1 - {}^6u_2(2\alpha \pm 1) + 4\alpha \cdot {}^6u_3}{\alpha(1 + 2\beta)} \right) \frac{1}{h^2} \\ {}^6f_{\vartheta,2} &= {}^6f_{\vartheta,4} = \pm \frac{1}{\alpha\beta} (1 - {}^6u_2 \pm 2\alpha \cdot {}^6u_3) \frac{1}{h^2} \\ {}^6f_{\vartheta,3} &= \frac{2}{\beta} ({}^6u_2 - {}^6u_3) \frac{1}{h^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Querbiegemoment:

$${}^6m_{s,3} = \frac{3({}^6f_{\vartheta,2} - {}^6f_{\vartheta,3})}{(\beta + \frac{1}{2})h} K \quad (5.12)$$

Wölbwiderstand, Querbiegewiderstand und Drillwiderstand:

$$\begin{aligned} {}^6C &= \int_s {}^6u^2 t ds \\ &= \frac{2}{3} \left(\alpha(1 + {}^6u_2 + {}^6u_2^2) + \beta({}^6u_2^2 + {}^6u_2 \cdot {}^6u_3 + {}^6u_3^2) + \frac{1}{2} \cdot {}^6u_3^2 \right) ht \\ {}^6B &= \frac{1}{3} (2\beta + 1) \frac{{}^6m_3^2}{K} h \\ {}^6D &= \frac{2}{3} \left(\alpha \cdot {}^6f_{\vartheta,1}^2 + \beta \cdot {}^6f_{\vartheta,2}^2 + \frac{1}{2} \cdot {}^6f_{\vartheta,3}^2 \right) ht^3 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Die Einheitswölbfunktionen des C- und Hut-Profiles sind in den Bildern 5.3 und 5.4 dargestellt. Die Anwendung der Formeln wird an einem Zahlenbeispiel in Abschn. 8.3.3 vorgeführt.

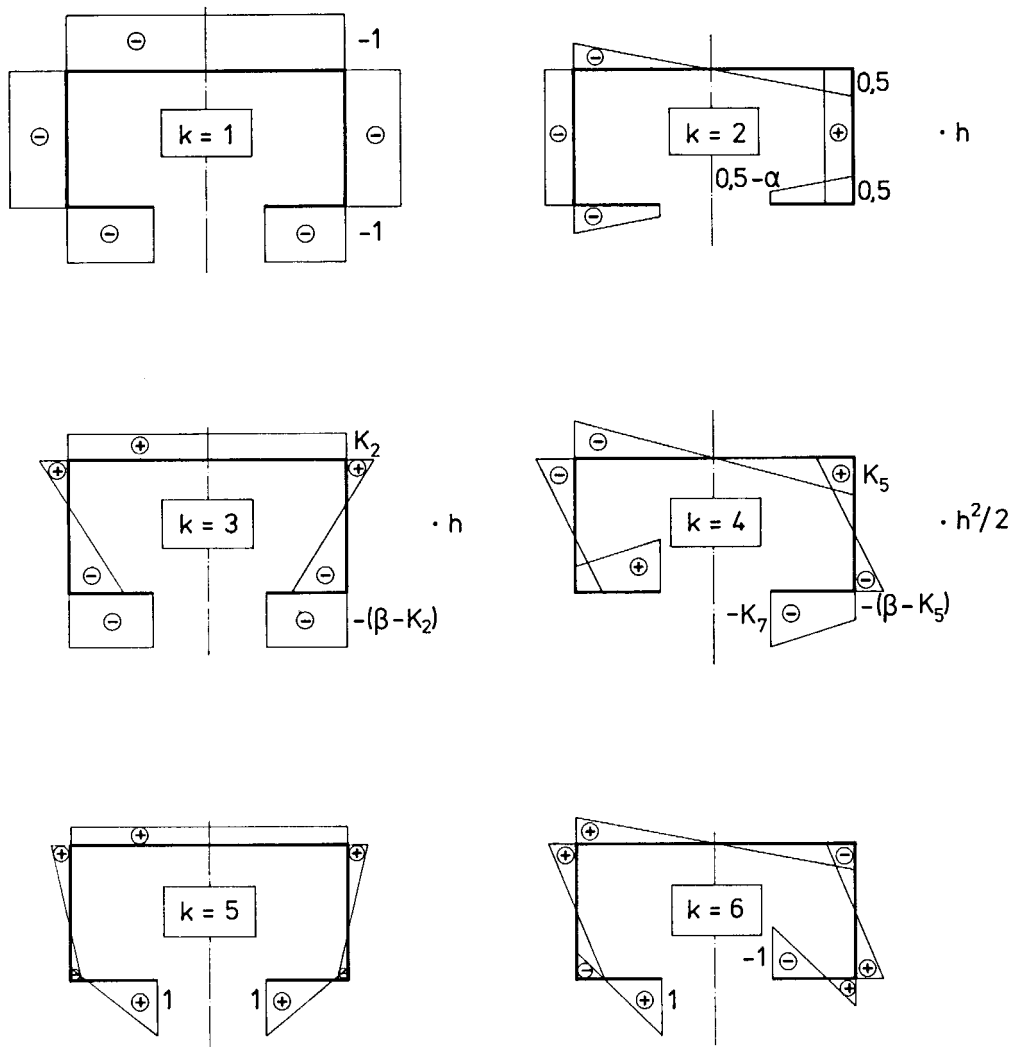


Bild 5.3 Einheitwölbfunktionen des C-Profiles

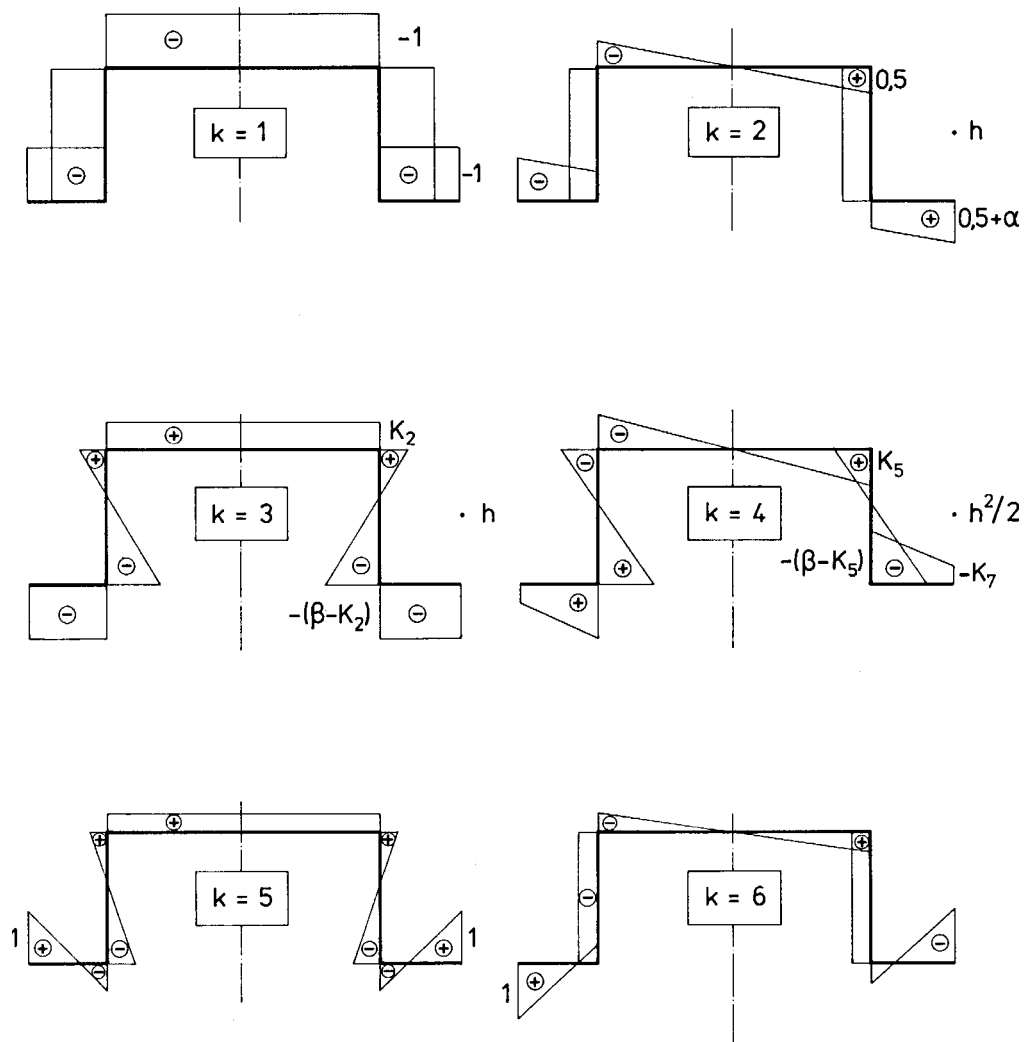


Bild 5.4 Einheitwölbfunktionen des Hut-Profiles

5.1.2 Formeln für die Querschnittswerte des Z-ProfilsVorwerte: $\alpha = a/h$, $\beta = b/h$ Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
K_1 &= 1 + 2(\alpha + \beta) \\
K_2 &= \frac{1}{12}(1 + 6\beta + 6\alpha - 12\alpha^2 + 8\alpha^3) \\
K_3 &= 2\beta^2(\alpha + \frac{1}{3}\beta) \\
K_4 &= \beta(\frac{1}{2}\beta + \alpha - \alpha^2) \\
K_6 &= \frac{\beta}{K_1}(\frac{1}{2}\beta + \alpha + \alpha^2) \\
K_7 &= \frac{1}{6}\beta^2[\alpha + \beta + 2\alpha(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)] - K_6\beta[\beta + 2\alpha(1 + \alpha)] + K_1K_6^2 \\
\Delta^5 N &= -\beta[\frac{3}{2}\alpha + \beta(1 + 3\alpha + \frac{3}{2}\beta + \alpha^2)] \\
\Delta^6 N &= \beta\left(\frac{1}{2}\beta(\alpha + \beta) - (1 + \beta)[\beta + \alpha(\frac{3}{2} + \alpha)]\right)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Für die Starrkörperanteile ($k = 1$ bis $k = 4$) gilt:

Querschnittsfläche:

$${}^1C = K_1 ht = A \tag{5.15}$$

Axiale Trägheitsmomente:

$$\begin{aligned}
I_y &= K_2 h^3 t \\
I_z &= K_3 h^3 t \\
I_{yz} &= K_4 h^3 t
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Hauptachsenneigung:

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2K_4}{K_2 - K_3} \tag{5.17}$$

Hauptträgheitsmomente:

$$\begin{aligned}
{}^2C &= I_\eta = I_y \cos^2 \varphi + I_z \sin^2 \varphi + I_{yz} \sin 2\varphi \\
{}^3C &= I_\zeta = I_y \sin^2 \varphi + I_z \cos^2 \varphi - I_{yz} \sin 2\varphi
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Wölbwiderstand:

$${}^4C = K_7 h^5 t = C_M \quad (5.19)$$

Drillwiderstände:

$$\begin{aligned} {}^1D = {}^2D = {}^3D &= 0 \\ {}^4D &= \frac{1}{3} K_1 h t^3 = I_D \end{aligned} \quad (5.20)$$

Wölbordinaten:

$$\begin{aligned} k = 1 : \quad & {}^1u_1 = {}^1u_2 = {}^1u_3 = {}^1u_4 = {}^1u_5 = {}^1u_6 = -1 \\ k = 2 : \quad & {}^2u_1 = -{}^2u_6 = -\left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \beta \sin \varphi - \alpha \cos \varphi\right) h \\ & {}^2u_2 = -{}^2u_5 = -\left(\frac{1}{2} \cos \varphi + \beta \sin \varphi\right) h \\ & {}^2u_3 = -{}^2u_4 = -\left(\frac{1}{2} \cos \varphi\right) h \\ k = 3 : \quad & {}^3u_1 = -{}^3u_6 = \left(\frac{1}{2} \sin \varphi - \beta \cos \varphi - \alpha \sin \varphi\right) h \\ & {}^3u_2 = -{}^3u_5 = \left(\frac{1}{2} \sin \varphi - \beta \cos \varphi\right) h \\ & {}^3u_3 = -{}^3u_4 = \left(\frac{1}{2} \sin \varphi\right) h \\ k = 4 : \quad & {}^4u_1 = {}^4u_6 = \left(K_6 - \frac{1}{2} \beta - \alpha \beta\right) h^2 \\ & {}^4u_2 = {}^4u_5 = \left(K_6 - \frac{1}{2} \beta\right) h^2 \\ & {}^4u_3 = {}^4u_4 = K_6 h^2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Für den antimetrischen Profilverformungszustand ($k = 5$) gilt:

Wölbordinaten:

$$\begin{aligned} {}^5u_1 &= -{}^5u_6 = 1 \\ {}^5u_2 &= -{}^5u_5 = \alpha \beta \left[\frac{3}{2} + \beta(3 + 2\alpha) \right] \frac{1}{\Delta^5 N} \\ {}^5u_3 &= -{}^5u_4 = -\alpha \beta (4\alpha \beta + 3\alpha^2 + \frac{3}{2} \beta) \frac{1}{\Delta^5 N} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Scheibenverdrehungen:

$$\begin{aligned} {}^5f_{\vartheta,2} &= -{}^5f_{\vartheta,4} = -\frac{1}{\beta} \left(2 \cdot {}^5u_3 - \frac{1}{\alpha} ({}^5u_2 - 1) \right) \frac{1}{h^2} \\ {}^5f_{\vartheta,1} &= -{}^5f_{\vartheta,5} = {}^5f_{\vartheta,2} - \frac{1 + 2\beta}{4(1 + \beta)^2 - 1} \left(2 \cdot {}^5u_3 - \frac{1}{\alpha} ({}^5u_2 - 1) \right) \frac{1}{h^2} \\ {}^5f_{\vartheta,3} &= 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Querbiegemoment:

$${}^5m_{s,3} = \frac{2 \cdot {}^5f_{\vartheta,2}}{\left(\frac{2}{3} \beta + 1\right) h} K \quad (5.24)$$

Wölbwiderstand, Querbiege­widerstand und Drillwiderstand:

$$\begin{aligned}
 {}^5C &= \frac{2}{3} \left(\alpha(1 + {}^5u_2 + {}^5u_2^2) + \beta({}^5u_2^2 + {}^5u_2 \cdot {}^5u_3 + {}^5u_3^2) + \frac{1}{2} \cdot {}^5u_3^2 \right) \cdot ht \\
 {}^5B &= \left(\frac{2}{3}\beta + 1 \right) \frac{{}^5m_3^2}{K} h \\
 {}^5D &= \frac{2}{3} \left(\alpha \cdot {}^5f_{\vartheta,1}^2 + \beta \cdot {}^5f_{\vartheta,2}^2 \right) ht^3
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Für den symmetrischen Profilverformungszustand ($k = 6$) gilt:

Wölbordinaten:

$$\begin{aligned}
 {}^6u_1 &= {}^6u_6 = 1 \\
 {}^6u_2 &= {}^6u_5 = \frac{1}{2}\alpha\beta[-\beta + (1 + \beta)(3 + 4\alpha)] \frac{1}{\Delta^6 N} \\
 {}^6u_3 &= {}^6u_4 = \alpha\beta[-\frac{1}{2}(\alpha + \beta)(3 + 4\alpha) + \beta + \frac{3}{2}\alpha + \alpha^2] \frac{1}{\Delta^6 N}
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Scheibenverdrehungen:

$$\begin{aligned}
 {}^6f_{\vartheta,2} &= {}^6f_{\vartheta,4} = -\frac{1}{\alpha\beta}(1 - {}^6u_2) \frac{1}{h^2} \\
 {}^6f_{\vartheta,1} &= {}^6f_{\vartheta,5} = {}^6f_{\vartheta,2} - \frac{3 + 2\beta}{4(1 + \beta)^2 - 1} \left(\frac{1}{\alpha}(1 - {}^6u_2) - 2({}^6u_2 - {}^6u_3) \right) \frac{1}{h^2} \\
 {}^6f_{\vartheta,3} &= -\frac{2}{\beta}({}^6u_2 - {}^6u_3) \frac{1}{h^2}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Querbiegemoment:

$${}^6m_{s,3} = \frac{3({}^6f_{\vartheta,2} - {}^6f_{\vartheta,3})}{(\beta + \frac{1}{2})h} K \tag{5.28}$$

Wölbwiderstand, Querbiege­widerstand und Drillwiderstand:

$$\begin{aligned}
 {}^6C &= \frac{2}{3} \left(\alpha(1 + {}^6u_2 + {}^6u_2^2) + \beta({}^6u_2^2 + {}^6u_2 \cdot {}^6u_3 + {}^6u_3^2) + \frac{3}{2} \cdot {}^6u_3^2 \right) ht \\
 {}^6B &= \frac{1}{3} (2\beta + 1) \frac{{}^6m_3^2}{K} h \\
 {}^6D &= \frac{2}{3} \left(\alpha \cdot {}^6f_{\vartheta,1}^2 + \beta \cdot {}^6f_{\vartheta,2}^2 + \frac{1}{2} {}^6f_{\vartheta,3}^2 \right) ht^3
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

5.1.3 Einarbeiten von Querschnittslagerungen

Bei der Verwendung von Kaltprofilen als Dachpfetten müssen Querschnittslagerungen berücksichtigt werden. Durch die Dachhaut ist i. allg. der Obergurt horizontal gehalten und drehgebettet. Diese Lagerungsbedingungen werden mittels Pendelstab und Drehfeder idealisiert. Dazu kann man wie in Abschnitt 3.3.5 vorgehen oder für spezielle Querschnitte geschlossene Formeln verwenden, wie sie im folgenden angegeben werden.

Wir bezeichnen im folgenden die genäherten Größen des gelagerten Querschnitts mit einem Stern (${}^2V^*$, ${}^2u^*$ etc.).

Es reicht aus, wenn man sich auf die beiden Verformungen ${}^2V^*$ und ${}^3V^*$ beschränkt, welche die Biegung und Verdrehung des gelagerten Querschnitts darstellen. Sie sollen aus den drei Verformungen ${}^2V = w$, ${}^3V = v$ und ${}^4V = \vartheta$ des ungelagerten Querschnitts mittels Linearkombination zusammengesetzt werden. Obwohl für den Z-Querschnitt die beiden Verformungen v und w bezüglich der Verwölbungen nicht orthogonal sind, wird die Beschreibung der Modalformen des gelagerten Querschnitts mit ihrer Hilfe einfacher als bei Verwendung der Hauptachsenverschiebungen. Die Bilder 5.5 und 5.6 zeigen für das Z- und das C-Profil die drei Ansatzverformungen des freien Querschnitts und die daraus gebildeten beiden orthogonalen Verformungen, welche die Lagerungsbedingungen erfüllen.

Die durch Linearkombination konstruierten Verformungen ${}^2V^*$ und ${}^3V^*$ sollen folgende Bedingungen erfüllen:

- 1) die Einheitsverwölbungen sind zueinander orthogonal und
- 2) die Horizontalverschiebung des gelagerten Obergurts verschwindet.

Die Verformung ${}^2V = w$ erfüllt schon die Bedingung, daß sich der obere Gurt horizontal nicht verschiebt, so daß wir direkt ${}^2V^* = {}^2V = w$ setzen können. Für ${}^3V^*$ bleibt dann noch ein linearer Ansatz mit den zunächst unbekanntenen Faktoren g_2 und g_3 :

$$\begin{aligned}
 {}^2V^* &= w , \\
 {}^3V^* &= g_2 \cdot w + g_3 \cdot v + \vartheta , \\
 {}^2u^* &= -z , \\
 {}^3u^* &= -g_2 \cdot z - g_3 \cdot y + {}^4u .
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Aus der Orthogonalitätsbedingung $\int_A {}^2u^* \cdot {}^3u^* dA = 0$ ergibt sich

$$\int_A -z(-g_2 \cdot z - g_3 \cdot y + {}^4u) dA = g_2 \cdot I_y + g_3 \cdot I_{yz} = 0 \tag{5.31}$$

und man erhält

$$g_2 = -g_3 \cdot \frac{I_{yz}}{I_y} . \tag{5.32}$$

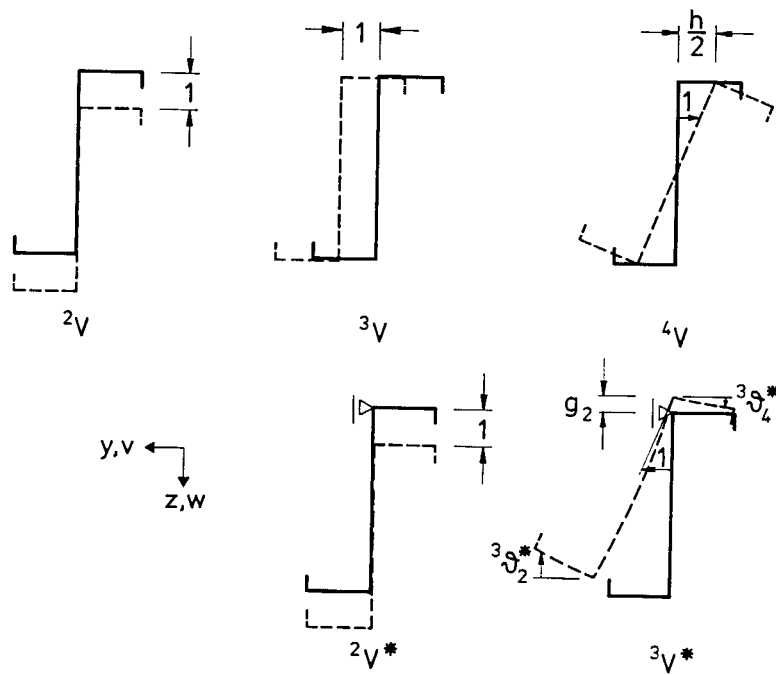


Bild 5.5 Modalformen des freien und des gelagerten Z-Profiles

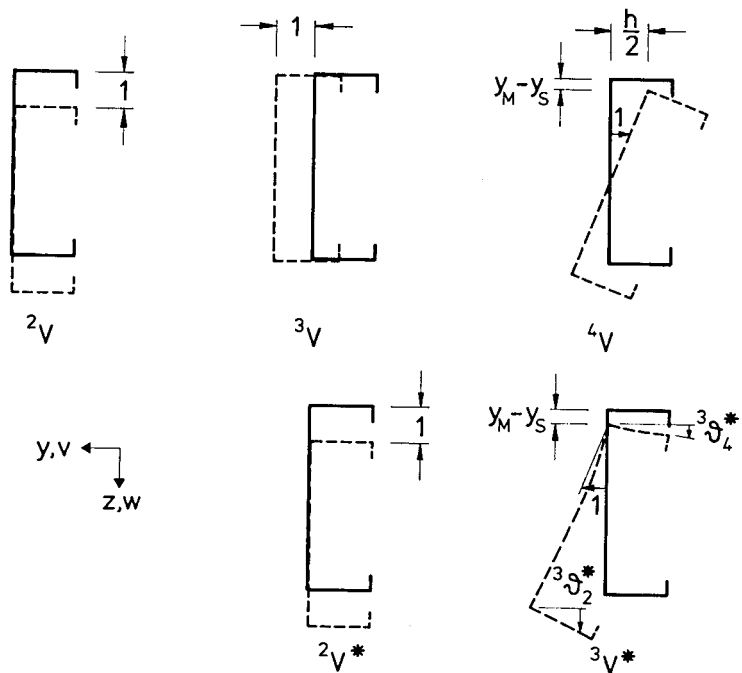


Bild 5.6 Modalformen des freien und des gelagerten C-Profiles

Die Horizontalverschiebung des Obergurts (Scheibe 4) setzt sich aus der Querverschiebung v und der Verschiebung infolge Verdrehung des ungelagerten Querschnitts um den Schubmittelpunkt zusammen. Die Verdrehung des Stegs wird mit $\vartheta = 1$ vorgegeben. Damit erhält man mit

$$\begin{aligned} {}^3f_{s,4}^* &= 0 \\ &= g_2 \cdot 0 - g_3 \cdot 1 + \frac{h}{2} \cdot 1 \end{aligned} \quad (5.33)$$

schließlich

$$g_2 = -\frac{h}{2} \cdot \frac{I_{yz}}{I_y}, \quad g_3 = \frac{h}{2}. \quad (5.34)$$

Die Wölbfunktion ${}^3u^*$ ist nun ebenfalls bestimmt:

$${}^3u^* = \frac{h}{2} \cdot \frac{I_{yz}}{I_y} \cdot z - \frac{h}{2} \cdot y + {}^4u. \quad (5.35)$$

Der Verdrehvorgang $k = 3$ ist wegen der Drehbettung mit einer Querschnittsverformung verbunden. Für den Verlauf des Querbiegemomentes ${}^3m_s^*(s)$ wird vereinfachend ein linearer Verlauf über den Steg und den drehbettenen Obergurt angenommen, so daß nur am Knoten 4 eine Ordinate vorhanden ist. Das Kantenmoment ${}^3m_{s,4}^*$ muß mit dem Federmoment ${}^3\vartheta_4^* \cdot c_\vartheta$ im Gleichgewicht stehen:

$${}^3m_{s,4}^* = {}^3\vartheta_4^* \cdot c_\vartheta. \quad (5.36)$$

Man denke sich das Moment der Drehfeder als Kräftepaar an den Knoten 4 und 5 eingeleitet.

Aus der gegenseitigen Verdrehung der Sehnen von Steg und Obergurt infolge Querbiegung

$${}^3\vartheta_3^* - {}^3\vartheta_4^* = \frac{1}{3} \frac{(h+b) {}^3m_{s,4}^*}{K}$$

und der Normierung der Stegverdrehung ${}^3\vartheta_3^* = 1$ ergeben sich die Verdrehungen der Gurtscheiben 2 und 4 zu

$$\begin{aligned} {}^3\vartheta_4^* &= \frac{1}{1 + \frac{c_\vartheta(h+b)}{3K}}, \\ {}^3\vartheta_2^* &= 1 + \frac{h}{6K} {}^3m_{s,4}^*. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Nun können die Querschnittswerte durch Superposition gebildet werden

$$\begin{aligned}
 {}^2C^* &= I_y \\
 {}^3C^* &= \int_A {}^3u^* \cdot {}^3u^* \, dA \\
 &= g_2^2 \cdot I_y + 2 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot I_{yz} + g_3^2 \cdot I_z + C_M \\
 {}^3D^* &= I_D \\
 {}^3B^* &= \frac{1}{K} \int_s ({}^3m^*(s))^2 \, ds + ({}^3\vartheta_4^*)^2 \cdot c_\vartheta \\
 &= {}^3\vartheta_3^* \cdot {}^3\vartheta_4^* \cdot c_\vartheta = {}^3\vartheta_3^* \cdot {}^3m_{s,4}^*
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Der Ausdruck für ${}^3B^*$ ergibt wegen ${}^3\vartheta_3^* = 1$ gerade das Kantenbiegemoment ${}^3m_{s,4}^*$. Die Linearkombination (5.30) enthält den Profilverformungsanteil nicht. Dieser Anteil aus Querbiegung wird erst nachträglich dem Verdrehungsvorgang überlagert. Die daraus resultierenden Querverschiebungs- und Wölbanteile können bei Bedarf mit der Kenntnis der beiden Gurtverdrehungen nachgetragen werden, sind jedoch in der Regel von untergeordneter Bedeutung.

Für das Zahlenbeispiel aus Abschnitt 3.3.5 erhält man mit dem Plattenmodul $K = 6,490 \text{ kNcm}$ die Querschnittswerte (in Klammern sind zum Vergleich die Werte nach der genauen Rechnung angegeben).

$$\begin{aligned}
 {}^2C^* &= I_y = 343,8 \text{ cm}^4 \\
 I_{yz} &= 98,475 \text{ cm}^4 \\
 g_3 &= \frac{h}{2} = 10 \\
 g_2 &= -g_3 \cdot \frac{I_{yz}}{I_y} = -10 \cdot \frac{98,475}{343,8} = -2,8643 \\
 {}^3\vartheta_4^* &= \frac{1}{1 + \frac{1(20+6,5)}{3 \cdot 6,49}} = 0,4235 \text{ (0,4215) /cm} \\
 {}^3m_{s,4}^* &= 0,4235 \cdot 1 = 0,4235 \text{ (0,4237) kN/cm} \\
 {}^3C^* &= (-2,8643)^2 \cdot 343,8 + 2 \cdot (-2,8643) \cdot 10 \cdot 98,475 \\
 &\quad + 10^2 \cdot 52,812 + 3787 \\
 &= 6247,6 \text{ (6308,3) cm}^4 \\
 {}^3D^* &= I_D = 0,0416 \text{ (0,0375) cm}^2 \\
 {}^3B^* &= {}^3m_{s,4}^* = 0,4235 \text{ (0,4237) kN/cm}^2
 \end{aligned}$$

5.2 Platten

Platten werden gewöhnlich nach der Kirchhoffschen Plattentheorie berechnet, indem man die für dünne Platten unter Vernachlässigung der Schubelastizität hergeleitete Bipotentialgleichung löst oder eine Näherungslösung mit Hilfe von Energieprinzipien sucht. Dazu steht eine große Anzahl von Standardwerken zur Verfügung, die hier nicht erwähnt werden brauchen.

Anstatt in komplizierteren Fällen zu Finit-Element-Methoden zu greifen, kann man im Falle von rechteckigen Platten mit in einer Richtung konstantem Dickenverlauf auch die VTB anwenden, mit der man recht übersichtlich und mit vergleichsweise geringem Aufwand zu guten Ergebnissen kommt.

Betrachtet man Platten als prismatische Tragwerke, so fällt auf, daß sie keinen echten Faltwerks-Querschnitt besitzen, da jegliche Kanten fehlen. Ihr Querschnitt ist entartet. Da es nur zwei Hauptknoten gibt, sind auch nur maximal zwei unabhängige Wölbordinaten möglich. Diese stellen nach der Orthogonalisierung die Längung und die Biegung um die starke Achse (Scheibenbiegung) dar. Bei bestimmten Lagerungen entfallen auch diese Wölbfreiheitsgrade noch. Es bleiben nur die Verschiebungen f der Zwischenknoten als Plattenfreiheitsgrade eines Faltwerks übrig, wenn man den gesamten Plattenquerschnitt als einzige Hauptscheibe mittels Zwischenknoten unterteilt. Der Vektor der Freiheitsgrade enthält dann nur noch die Verschiebungen der Zwischenknoten:

$$\mathbf{x} = \{f_1, f_2, \dots, f_{n+1}\}. \quad (5.39)$$

Die Platte besitzt als prismatisches Tragwerk in der VTB eine ausgezeichnete Längsrichtung, die wir wieder mit der Koordinate x bezeichnen. Die Plattenränder parallel dazu werden entsprechend Längsränder genannt, während die rechtwinklig dazu verlaufenden Ränder der Rechteckplatte die Querränder sind. Wie bei der Platte üblich, wird die bisher verwendete Koordinate s im Querschnitt durch y ersetzt. Die Breite der gesamten Platte ist b und die Länge ist l . Die Bezeichnungen sind im Bild 5.7 wiederzufinden.

Sind sowohl Geometrie als auch Lagerung in beide Richtungen prismatisch, so bleibt es freigestellt, in welche der beiden Richtungen die x -Achse gelegt wird. Bei der Wahl ist es oft vorteilhaft, wenn man beachtet, daß die Lagerungsbedingungen der Längsränder in die Querschnittswerteermittlung eingehen, während sich aus der Lagerung der Querränder die Randbedingungen der Differentialgleichung ergeben. Außerdem ist bei der Wahl die Lastanordnung zu berücksichtigen.

Für die Formulierung eines Plattenproblems im Rahmen der VTB stehen grundsätzlich zwei Möglichkeiten zur Verfügung:

- a) Die Platte wird als entartetes Faltwerk behandelt. Je nach Art der Last und gewünschter Genauigkeit wird der Querschnitt durch eine entsprechende Anzahl von Zwischenknoten unterteilt. Die Formulierung unterscheidet

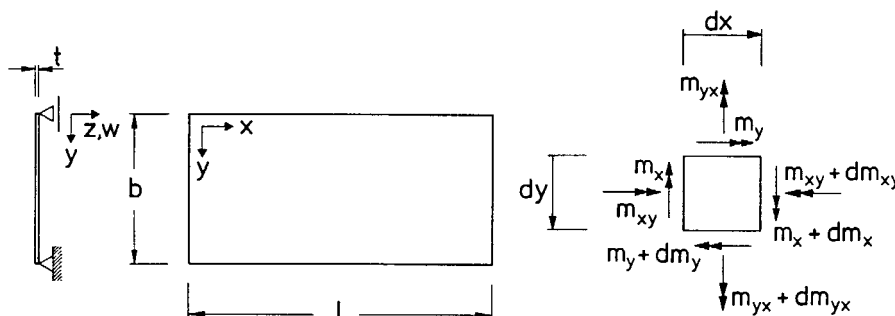


Bild 5.7 Bezeichnungen an der Rechteckplatte

sich dann nicht von der des Faltrwerks. Für die Auffindung der orthogonalen Einheitsverformungen muß das Matrixeigenwertproblem (2.68) gelöst werden. Die Eigenfunktionen sind abschnittsweise stetige Querschnittsfunktionen (lineare Momente, kubische Verschiebungen etc.). Die Formeln des Faltrwerks können direkt übernommen werden. Auf diese Weise können Querschnitte mit veränderlicher Dicke und Querschnittslagerungen problemlos erfaßt werden.

- b) Auf eine Unterteilung des Querschnitts wird verzichtet. Statt dessen werden stetige Eigenfunktionen ${}^k f(y)$ gesucht, welche die beiden Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_A i_f k_f dA = 0 \quad \text{für } i \neq k \quad (5.40a,b)$$

$$\int_A i_f k_f dA = 0$$

erfüllen. In einigen Fällen (konstante Dicke, einfache Lagerung) können diese direkt angegeben werden. Es handelt sich um die Eigenschwingungsformen des Balkens mit entsprechenden Randbedingungen (die Orthogonalitätsbedingungen sind nämlich dieselben wie diejenigen, mit welchen man die Entkopplung bezüglich der potentiellen und kinetischen Energie des Balkens formuliert). Damit entfallen die durch die Diskretisierung entstehenden Unstetigkeiten (vgl. auch Kap. 6).

5.2.1 An den Längsrändern gelenkig gelagerte Platten

Wenden wir uns einem bekannten Plattenproblem zu, der an zwei parallelen Rändern gelenkig gelagerten Platte. Wir wollen zunächst den klassischen Lösungsansatz in Erinnerung rufen, um dann die entsprechende Gleichung mit der VTB herzuleiten und gegenüberzustellen.

Der Reihenansatz von Sinusfunktionen in Querrichtung erfüllt von sich aus die Längsrandbedingungen und führt das zweidimensionale Problem auf ein eindimensionales zurück. Die partielle Plattendifferentialgleichung

$$\Delta\Delta w = q/K \quad (5.41)$$

wird durch Entwicklung der Verschiebung $w(x, y)$ und der Belastung $q(x, y)$ gemäß

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{k=1}^n X_k \sin \frac{k\pi y}{b} , \\ q(x, y) &= \sum_{k=1}^n q_k \sin \frac{k\pi y}{b} \end{aligned} \quad (5.42)$$

in Querrichtung gelöst. Dies führt auf eine Reihe gewöhnlicher entkoppelter Differentialgleichungen 4. Ordnung:

$$X_k'''' - 2\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 X_k'' + \left(\frac{k\pi}{b}\right)^4 X_k = \frac{1}{K} q_k . \quad (5.43)$$

Die partielle Differentialgleichung(5.41) wird auf eine Reihe von gewöhnlichen Differentialgleichungen vierter Ordnung reduziert.

Wollen wir nun zum Vergleich die Differentialgleichungen der VTB nach Methode b), d.h. mit stetigen Ansatzfunktionen, aufstellen, so ist festzustellen, daß die oben verwendeten Ansatzfunktionen nicht nur die Längsrandbedingungen sondern zugleich auch die Orthogonalitätsbedingungen der VTB erfüllen und somit stetige Lösungen des zugehörigen Querschnittswerteproblems sind. Wir können sie demnach als Eigenfunktionen ${}^k f(y)$ übernehmen:

$${}^k f(y) = \sin \frac{k\pi y}{b} . \quad (5.44)$$

Das Eigenwertproblem ist damit bereits gelöst. Für die Aufstellung der Differentialgleichung sind die Querschnittswerte und Lastglieder aus den orthogonalen Einheitsverformungen ${}^k f$ durch Integration über y zu bestimmen. Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} {}^k \dot{f} &= \frac{k\pi}{b} \cdot \cos \frac{k\pi y}{b} , \\ {}^k \ddot{f} &= -\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 \cdot \sin \frac{k\pi y}{b} \end{aligned} \quad (5.45)$$

erhält man (vgl. (4.10) bis (4.16)) die Steifigkeitswerte

$$\begin{aligned}
 E^{kC} &= K \int_0^b {}^k f^2 \, dy = \frac{1}{2} \cdot Kb, \\
 G^{kD} &= K \cdot 2(1 - \mu) \int_0^b {}^k \dot{f}^2 \, dy - K \cdot 2\mu \int_0^b {}^k \dot{f} {}^k f \, dy \\
 &= K \left(2(1 - \mu) \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \cdot \frac{b}{2} + 2\mu \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \cdot \frac{b}{2} \right) \\
 &= Kb \cdot \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2, \\
 {}^k B &= K \int_0^b {}^k \dot{f}^2 \, dy = K \left(\frac{k\pi}{b} \right)^4 \cdot \frac{b}{2}.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Wegen der vollständigen Orthogonalität der Ansatzfunktionen ${}^k f$ treten keine gemischten Glieder ${}^{ik}C$ usw. auf, so daß in den Matrizen \mathbf{C} , \mathbf{D} , und \mathbf{B} alle Außerdiagonalelemente verschwinden. Deshalb genügt es, die Steifigkeitswerte mit nur einem Index k zu kennzeichnen.

Für die Berechnung der Zustandslast ${}^k q$ ist bei allgemeiner Lastanordnung das Integral

$${}^k q(x) = \int_0^b q(x, y) \cdot {}^k f(y) \cdot dy \tag{5.47}$$

auszuwerten. Damit sind alle Koeffizienten und die rechte Seite der Differentialgleichungen bereitgestellt. Man erhält für jeden Zustand eine entkoppelte Differentialgleichung der Form

$$E^{kC} {}^k V'''' - G^{kD} {}^k V'' + {}^k B {}^k V = {}^k q. \tag{5.48}$$

Zwischen der Zustandslast ${}^k q$ und dem Lastkoeffizient q_k in (5.42) besteht die Beziehung ${}^k q = q_k \cdot b/2$. Setzt man die Ausdrücke für die Querschnittswerte (5.46) in (5.48) ein, so erkennt man, daß die beiden Differentialgleichungen (5.43) und (5.48) äquivalent sind.

An den Querrändern $x = 0$ und $x = l$ kann über die Lagerbedingungen noch frei verfügt werden. Sie beeinflussen nur die Funktionen ${}^k V(x)$.

Für die Lösung der Differentialgleichungen können geschlossene Lösungen (Abschn. 8.1) oder das Differenzenverfahren (Abschn. 8.2) angewendet werden. Die Wahl trifft man je nach Art der Lastanordnung in x -Richtung und der Lagerungsbedingungen.

Ist die Differentialgleichung gelöst und sind damit die Verformungsergebnisse ${}^k V$ ermittelt, so bleibt noch die Aufgabe, Verschiebungen und Schnittkräfte

auszurechnen. Bei der Platte interessieren die Durchbiegung w sowie die Biegemomente m_x , m_y und m_{xy} . Die Plattenverformung $w(x, y)$ schreibt sich

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^n {}^k f(y) \cdot {}^k V(x) . \quad (5.49)$$

Bei der Ermittlung der Plattenbiegemomente gehen die Krümmungen in beiden Koordinatenrichtungen über die Querdehnung ein:

$$\begin{aligned} m_x(x, y) &= -K \cdot \sum_{k=1}^n ({}^k f \cdot {}^k V'' + \mu \cdot {}^k \dot{f} \cdot {}^k V) , \\ m_y(x, y) &= -K \cdot \sum_{k=1}^n ({}^k \dot{f} \cdot {}^k V + \mu \cdot {}^k f \cdot {}^k V'') , \\ m_{xy}(x, y) &= -K \cdot (1 - \mu) \sum_{k=1}^n {}^k \dot{f} \cdot {}^k V' . \end{aligned} \quad (5.50)$$

Es ist zu beachten, daß das Einheitsquerbiegemoment ${}^k m_s$ nicht identisch ist mit dem allgemeinen Plattenquerbiegemoment m_y . Es ist das spezielle Moment m_y , das sich im Einheitsverformungszustand ${}^k V = 1$, also bei fehlender Längskrümmung einstellt, und ergibt sich aus dem Elastizitätsgesetz zu

$${}^k m_s = -K \cdot {}^k \dot{f}^2 = K \cdot \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \cdot \sin \frac{k\pi y}{b} . \quad (5.51)$$

In dem hier vorgeführten einfachsten Fall führen die klassische Methode und die VTB auf dieselbe Differentialgleichung. Der Unterschied besteht in dem Verständnis der Ansatzfunktionen. Während beim herkömmlichen Sinusansatz die Orthogonalität der Ansatzfunktionen als rein mathematische Eigenschaft verstanden wird, kommt ihr bei der VTB eine physikalische Bedeutung zu, indem sie nämlich als Bedingung für die Entkopplung der Differentialgleichungen bezüglich der Anteile aus den Arbeiten von Wölb- und Querbiegespannungen gesehen wird. Daß die Differentialgleichungen darüber hinaus auch in den restlichen Anteilen entkoppelt sind, ist eine Folge der speziellen, einfachen Struktur des Problems.

5.2.2 Allgemeine Lagerung der Plattenquerschnitte

Im vorangehenden Abschnitt konnten für den Sonderfall beidseitiger Navier–Längsränder die Sinus–Funktionen als Eigenschwingungsformen vorteilhaft verwendet werden.

Bei anderer Lagerung des Plattenquerschnittes können ebenfalls die Modalformen eines gleichartig gelagerten Balkens als geschlossene Funktionen verwendet werden. Sie besitzen jedoch eine ungleich kompliziertere Darstellung, was die Berechnung der Steifigkeitswerte erschwert.

Diese Modalformen sind immer wegen ihrer Orthogonalitätsbedingungen bezüglich der kinetischen und potentiellen Energie im dynamischen Problem auch in Bezug auf den Plattenwölb– und den Querbiege­widerstand entkoppelt, aber es tritt im allgemeinen eine Verkopplung zwischen den Ansatzfunktionen über den Drillwiderstand auf.

Da außerdem bei singulären Lasten mit den stetigen Ansatzfunktionen keine gute Konvergenz zu erreichen ist, bieten sie keine wesentlichen Vorteile und werden deshalb hier nicht weiter ausgeführt.

Wir kehren daher wieder zu den Ansätzen zurück, die aus kubischen Verformungsverläufen über die Scheiben des mittels Zwischenknoten eingeteilten Plattenquerschnittes gebildet werden.

Lagerungen des Querschnitts können an Innen– und an Randknoten auftreten. Sie verhindern das Auftreten entsprechender, den Knoten ursprünglich zugeordneter Freiheitsgrade. Einspannungen müssen bei der statisch unbestimmten Rechnung für die Ermittlung der Querbiegemomente der Einheitszustände berücksichtigt werden.

Besondere Betrachtungen sind für freie Plattenränder notwendig. Wie bei der Besprechung der Randbedingungen in Abschn. 2.8.5 erwähnt wurde, sind die in Analogie zum freien Ende beim Balken aufgestellten Formulierungen

$$\begin{aligned} {}^k W(0) &= 0, \\ {}^k W'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{5.52}$$

zu ungenau, da hier lediglich die Arbeit der Wölb– und Schubspannungen eingeht, während Terme aus den Drill– und Biegemomenten nicht erscheinen. In Kap. 4 wurden die vollständigen Ausdrücke aufgestellt und daraus eine verbesserte Formel abgeleitet:

$$\begin{aligned} {}^k W(0) &= 0, \\ {}^k W'(0) - G^k D^k V'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Da bei faltwerken das Tragverhalten zu einem Hauptteil auf den Verwölbungen beruht, ist die Formulierung (5.52) in vielen Fällen ausreichend genau. Bei Platten hingegen treten Membranverwölbungen überhaupt nicht auf und die

potentielle Energie geht allein in die Biegespannungen. Damit ist auch klar, daß die Verwendung der Randbedingungen in der vereinfachten Form zu erheblichen Fehlern bei der Plattenlösung führen würde. Es ist somit erforderlich, die vollständigen Randbedingungen (5.53) zu benutzen.

Um den Zusammenhang mit der klassischen Plattentheorie herzustellen, wollen wir sie noch einmal auf anderem Wege herleiten.

Die Kirchhoffsche Plattentheorie fordert entlang dem freien Rand das Verschwinden des Plattenbiegemomentes, das sich über die Querdehnung aus Längs- und Querkrümmung zusammensetzt, und der Ersatzquerkraft als Summe aus Querkraft und Gradienten des Torsionsmomentes.

Wir wollen zunächst die Querränder betrachten. Sie liefern die Randbedingungen für die Differentialgleichungen. Für den Querrand $x = \text{const}$ gelten die Bedingungen

$$\begin{aligned} m_x &= -K(w'' + \mu \cdot \ddot{w}) = 0, \\ \bar{q}_x &= -K(w''' + (2 - \mu) \cdot \dot{w}') = 0. \end{aligned} \quad (5.54)$$

wobei \bar{q}_x die Kirchhoffsche Ersatzquerkraft bezeichnet. Diese Gleichungen sollen nun in die Schreibweise der VTB überführt, d.h. als Bedingungen für die Funktionen kV und kW geschrieben werden. Dazu wird zuerst die Verschiebung w durch den Reihenansatz

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{n+1} {}^k f(y) {}^k V(x) \quad (5.55)$$

ersetzt, was auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} -K \sum_{k=1}^{n+1} \left({}^k f {}^k V''(0) + \mu {}^k \dot{f} {}^k V(0) \right) &= 0, \\ -K \sum_{k=1}^{n+1} \left({}^k f {}^k V'''(0) + (2 - \mu) {}^k \dot{f} {}^k V'(0) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (5.56)$$

führt. Um eine Formulierung als Zustandslagerung zu erhalten, bei der die Randbedingungen für die einzelnen Zustände unabhängig voneinander sind, müssten in (5.56) die Summen beseitigt werden. Dazu erinnern wir uns an die Orthogonalitätseigenschaft der Funktion ${}^k f$, nämlich $\int_A {}^i f {}^k f \, dA = 0$ für $i \neq k$. Indem wir (5.56) mit ${}^i f$ multiplizieren und über den Querschnitt integrieren erhalten wir

$$\begin{aligned} {}^k W(0) - \mu E \sum_{i=1}^{n+1} {}^i k D_2 \cdot {}^i V(0) &= 0, \\ {}^k W'(0) + \sum_{i=1}^{n+1} \left(\mu E {}^i k D_2 - G {}^i k D_1 \right) {}^i V'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

wobei die in Abschn. 4.1 eingeführten Abkürzungen

$${}^{ik}D_1 = \frac{1}{3} \int_0^b t^3 {}^i\dot{f}^k \dot{f} dy \quad \text{und} \quad {}^{ik}D_2 = \frac{1}{E} \int_0^b K {}^i\dot{f}^k f dy \quad (5.58)$$

verwendet wurden. Wie sich ersehen läßt, gelingt die Entkopplung der Randbedingungen nur teilweise, nämlich nur für die "klassischen" Anteile ${}^k W$ bzw. ${}^k W'$.

Die praktische Rechnung kann wie bei der Behandlung der Drillmatrix so durchgeführt werden, daß die Außerdiagonalelemente ($i \neq k$) in den Summen jeweils vernachlässigt werden (zwangsentkoppelte Rechnung). Damit erfolgt eine vereinfachte Erfassung der Plattenanteile in den Randbedingungen. Für eine exakte Erfassung ist die Berücksichtigung der verkoppelten Randbedingungen notwendig.

Die Bedingungen für freie Ränder in Längsrichtung lauten

$$\begin{aligned} m_y &= -K(\dot{w} + \mu w'') = 0, \\ \bar{q}_y &= -K(\dot{w} + (2 - \mu)w'') = 0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Diese können nur in die Ermittlung der Einheitsverformungen einfließen und müssen von diesen vorab erfüllt werden. Da die Ermittlung der Einheitsmomente an der prismatischen Verrückungsfigur vorgenommen wird und bei dieser keine Längskrümmungen auftreten, ist es auf diesem Wege auch nicht möglich, eine Verkopplung der Längs- und Querkümmungen zu berücksichtigen. Die Ansatzfunktionen ${}^k f$ können daher lediglich die Randbedingungen

$${}^k \dot{f} = 0 \quad \text{und} \quad {}^k \ddot{f} = 0 \quad (5.60)$$

erfüllen. Dieser Fehler wirkt sich allerdings nicht stark aus.

5.2.3 Beispiel

Als Beispiel wird eine zweifeldrige Stahlbetonplatte mit der VTB berechnet und den Ergebnissen von Finit-Element-Rechnungen gegenübergestellt.

Die Geometrie der Struktur und die Materialkennwerte sind dem Bild 5.8 zu entnehmen. Der Querschnitt wird zu Vergleichszwecken in vier, sechs oder acht Scheiben aufgeteilt. Die Diskretisierung für das Differenzenverfahren ist gemeinsam mit den Querschnittsteilungen in Bild 5.9 dargestellt. Die Querschnittswerte für die 6-Scheiben-Teilung sind in Tabelle 5.1 aufgeführt. Als Lastfälle werden angesetzt :

- a) Einzellast F in Mitte von Feld 1
- b) gleichmäßig verteilte konstante Flächenlast q auf Feld 2

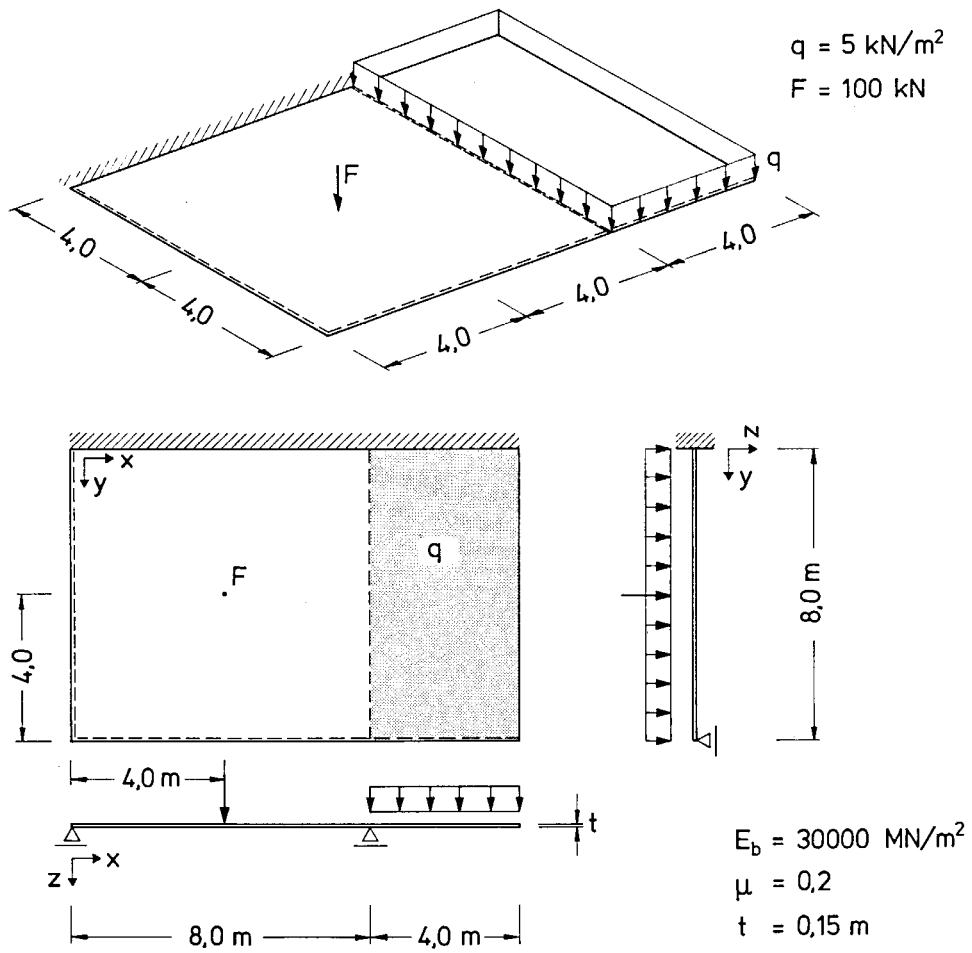


Bild 5.8 Geometrie und Materialkennwerte des Plattensystems im Beispiel

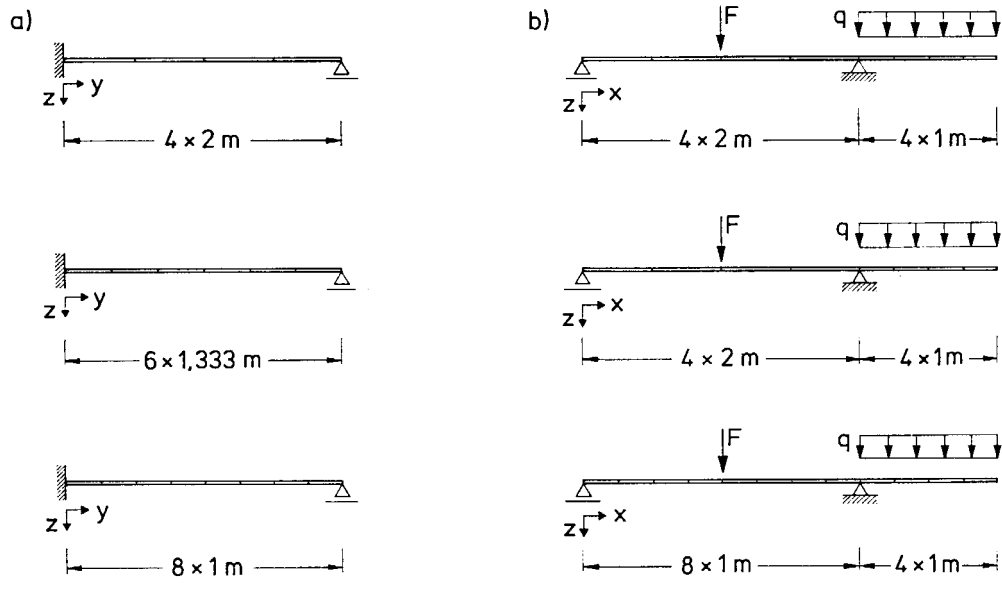


Bild 5.9 Querschnittsteilungen (a) und Teilungen in Längsrichtung für das Differenzenverfahren (b)

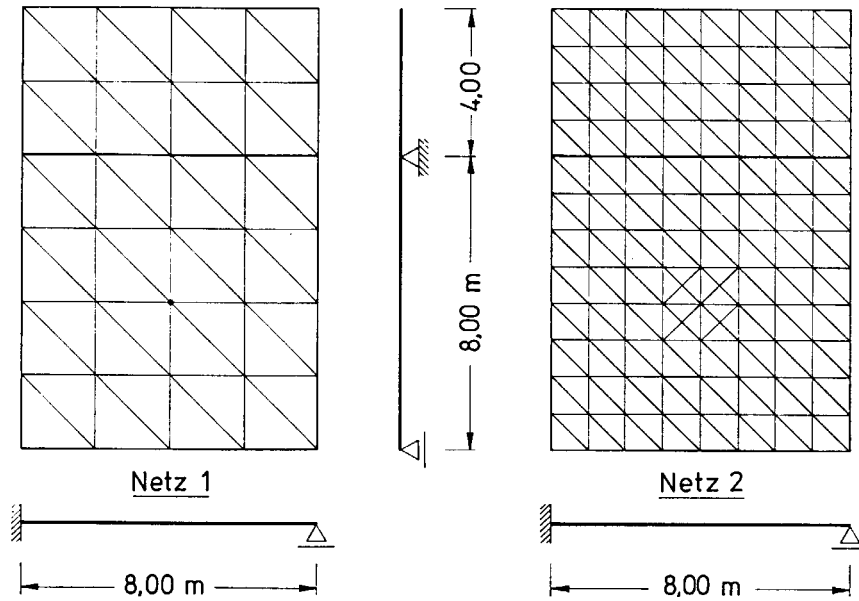


Bild 5.10 Elementeinteilungen für die FE-Berechnung

Tabelle 5.1 Querschnittswerte der Platte mit 5 Zwischenknoten

Zustand $k = 1$								
r	1u_r	${}^1f_{s,r}$	${}^1f_{\bar{s},r}$	${}^1f_{\vartheta,r}$	${}^1m_{s,r}$	1S_r	1v_r	1w_r
1	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7	-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
${}^1C = 12.$			${}^1D = 0$			${}^1B = 0$		

Zustand $k = 2$								
r	2u_r	${}^2f_{s,r}$	${}^2f_{\bar{s},r}$	${}^2f_{\vartheta,r}$	${}^2m_{s,r}$	2S_r	2v_r	2w_r
1	0.000	0.000	0.115	0.173	-2.931	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	0.453	0.333	-1.014	0.000	0.000	0.231
3	0.000	0.000	0.837	0.243	0.694	0.000	0.000	0.675
4	0.000	0.000	0.996	-0.005	1.790	0.000	0.000	1.000
5	0.000	0.000	0.803	-0.283	1.979	0.000	0.000	0.992
6	0.000	0.000	0.307	-0.461	1.268	0.000	0.000	0.615
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
${}^2C = 0.001122$			${}^2D = 0.000969$			${}^2B = 1.954225$		

Zustand $k = 3$								
r	3u_r	${}^3f_{s,r}$	${}^3f_{\bar{s},r}$	${}^3f_{\vartheta,r}$	${}^3m_{s,r}$	3S_r	3v_r	3w_r
1	0.000	0.000	-0.281	-0.422	9.095	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	-0.781	-0.327	-1.498	0.000	0.000	-0.562
3	0.000	0.000	-0.688	0.466	-6.822	0.000	0.000	-1.000
4	0.000	0.000	0.139	0.776	-2.636	0.000	0.000	-0.377
5	0.000	0.000	0.760	0.155	5.129	0.000	0.000	0.656
6	0.000	0.000	0.432	-0.648	6.664	0.000	0.000	0.864
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
${}^3C = 0.001022$			${}^3D = 0.003287$			${}^3B = 18.755940$		

Tabelle 5.1 (Fortsetzung) Querschnittswerte der Platte mit 5 Zwischenknoten

Zustand $k = 4$								
r	4u_r	${}^4f_{s,r}$	${}^4f_{\bar{s},r}$	${}^4f_{\vartheta,r}$	${}^4m_{s,r}$	4S_r	4v_r	4w_r
1	0.000	0.000	-0.465	-0.698	20.178	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	-0.728	0.303	-12.751	0.000	0.000	-0.930
3	0.000	0.000	0.201	1.090	-8.784	0.000	0.000	-0.525
4	0.000	0.000	0.593	-0.501	16.769	0.000	0.000	0.928
5	0.000	0.000	-0.370	-0.944	4.668	0.000	0.000	0.259
6	0.000	0.000	-0.500	0.750	-17.921	0.000	0.000	-1.000
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
${}^4C = 0.001144$			${}^4D = 0.008062$			${}^4B = 92.898337$		

Zustand $k = 5$								
r	5u_r	${}^5f_{s,r}$	${}^5f_{\bar{s},r}$	${}^5f_{\vartheta,r}$	${}^5m_{s,r}$	5S_r	5v_r	5w_r
1	0.000	0.000	-0.500	-0.750	29.788	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	-0.262	1.106	-29.914	0.000	0.000	-1.000
3	0.000	0.000	0.410	-0.098	16.426	0.000	0.000	0.475
4	0.000	0.000	-0.278	-0.935	11.863	0.000	0.000	0.345
5	0.000	0.000	-0.078	1.234	-30.773	0.000	0.000	-0.901
6	0.000	0.000	0.372	-0.558	25.423	0.000	0.000	0.744
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
${}^5C = 0.0008753$			${}^5D = 0.010944$			${}^5B = 219.967254$		

Zustand $k = 6$								
r	6u_r	${}^6f_{s,r}$	${}^6f_{\bar{s},r}$	${}^6f_{\vartheta,r}$	${}^6m_{s,r}$	6S_r	6v_r	6w_r
1	0.000	0.000	0.448	0.673	-34.458	0.000	0.000	0.000
2	0.000	0.000	-0.051	-1.423	42.291	0.000	0.000	0.897
3	0.000	0.000	-0.016	1.475	-51.794	0.000	0.000	-1.000
4	0.000	0.000	0.103	-1.296	50.238	0.000	0.000	0.967
5	0.000	0.000	-0.171	0.883	-39.540	0.000	0.000	-0.760
6	0.000	0.000	0.208	-0.313	21.719	0.000	0.000	0.417
7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
${}^6C = 0.000819$			${}^6D = 0.016722$			${}^6B = 513.412581$		

Die Lösung des Differentialgleichungssystems erfolgt mit dem in Kap. 8 beschriebenen Differenzenverfahren, wobei die Verkopplung der Differentialgleichungen über die Matrix \mathbf{D} vernachlässigt wird. Damit ist jede Differentialgleichung isoliert lösbar, was für den ersten Querbiegezustand $k = 2$ im Abschn. 8.2.4 an einem Vier-Scheiben-Querschnitt vorgeführt wird.

An dieser Stelle werden nur die Ergebnisse an ausgewählten Punkten der Struktur wiedergegeben. Dabei zeigt sich sehr deutlich, wie die genauen Resultate bei Berechnung mit der VTB stufenweise mit der Verfeinerung der Querschnittsteilung vom Vier-Scheiben-Querschnitt zu dem mit acht Scheiben angenähert werden. Auf jeder Diskretisierungsstufe kann der Anwender erkennen, wie er seine Ergebnisse einzuschätzen hat und wo verfeinerte Querschnittsteilungen diese noch nennenswert verändern. Der Iterationsprozeß läuft hier mit vergleichsweise geringem Aufwand ab, insbesondere wenn Rechenprogramme vorliegen, die durch Ausnutzen der speziellen Struktur der Probleme den Beschreibungsaufwand möglichst gering halten. Bereits beim Vier-Scheiben-Querschnitt sind die endgültigen Ergebnisse mit sehr wenig Aufwand so gut angenähert, daß man sich in vielen Fällen damit begnügen kann.

Die Vergleichsrechnungen mit finiten Plattenelementen wurden mit dem Programm ADINA [26] durchgeführt. Dazu wurden Dreiecksplattenelemente verwendet, die bessere Ergebnisse liefern als die viereckigen Schalenelemente.

Die Elemententeilung ist dem Bild 5.10 zu entnehmen. Dabei wurde im Bereich der Einzellast verfeinert diskretisiert und diese Einteilung der Einfachheit halber beim Lastfall Gleichstreckenlast übernommen.

Die Gegenüberstellung von Ergebnissen an ausgewählten Punkten für die beiden Lastfälle ist auf den folgenden Bildern und Tabellen zu sehen.

Für den Vergleich des Rechenaufwands bei Anwendung der FE-Methode und der VTB eignet sich die schematische Darstellung in Bild 5.15. Der Vergleich wird anhand des Vier-Scheiben-Querschnitts und der FE-Berechnung mit Netz 1 gezeigt, da beide Verfahren hier ähnlich genaue Ergebnisse bei grober Diskretisierung liefern. Bei der VTB ist in Betracht zu ziehen, daß am Anfang der Rechnung die Lösung eines allgemeinen symmetrischen Eigenwertproblems der Ordnung 5 steht. Danach ist für jeden der drei beteiligten Grundzustände ein unsymmetrisches Gleichungssystem im Sechser-Band für 18 Unbekannte zu lösen. Die FE-Berechnung erfordert dagegen die Lösung eines symmetrischen Gleichungssystem mit der halben mittleren Bandbreite 12 (maximal 16) für 56 Unbekannte.

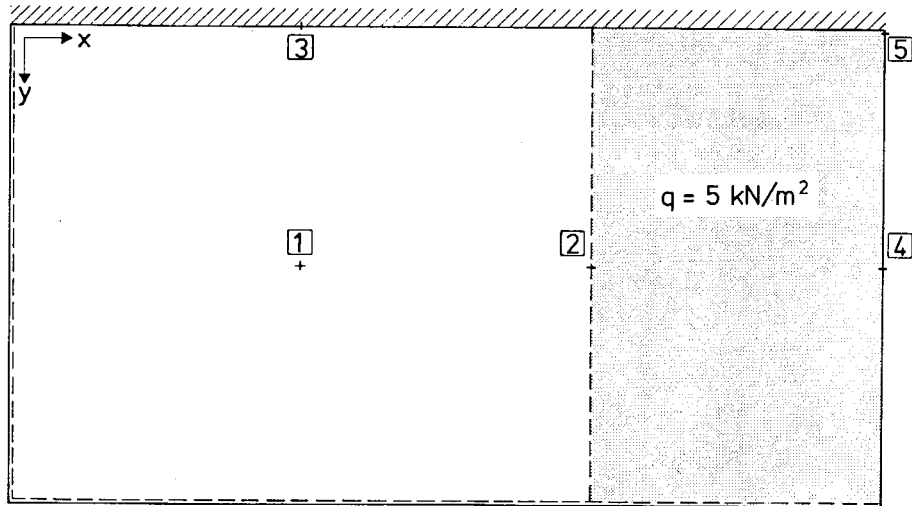


Bild 5.11 Lastfall Gleichstreckenlast q mit Kennzeichnung der ausgewählten Punkte

Tabelle 5.2 Gegenüberstellung der Ergebnisse aus VTB- und FEM-Rechnung an ausgewählten Punkten (Lastfall Gleichstreckenlast)

		VTB			FEM	
		Anzahl der Scheiben			Anzahl der Elemente	
Pkt		4	6	8	48	200
1	w	-0.072	-0.073	-0.076	-0.069	-0.076
	m_y	-1.38	-1.33	-1.36	-1.37	-1.32
	m_x	-0.39	-0.39	-0.41	-0.41	-0.42
2	m_x	-9.94	-10.09	-10.43	-10.14	-10.25
3	m_y	2.14	2.17	2.27	2.32	2.54
4	w	0.72	0.73	0.73	0.76	0.75
	m_y	12.04	11.67	11.38	13.18	11.86
5	m_y	-24.08	-25.34	-25.47	-31.71	-33.63

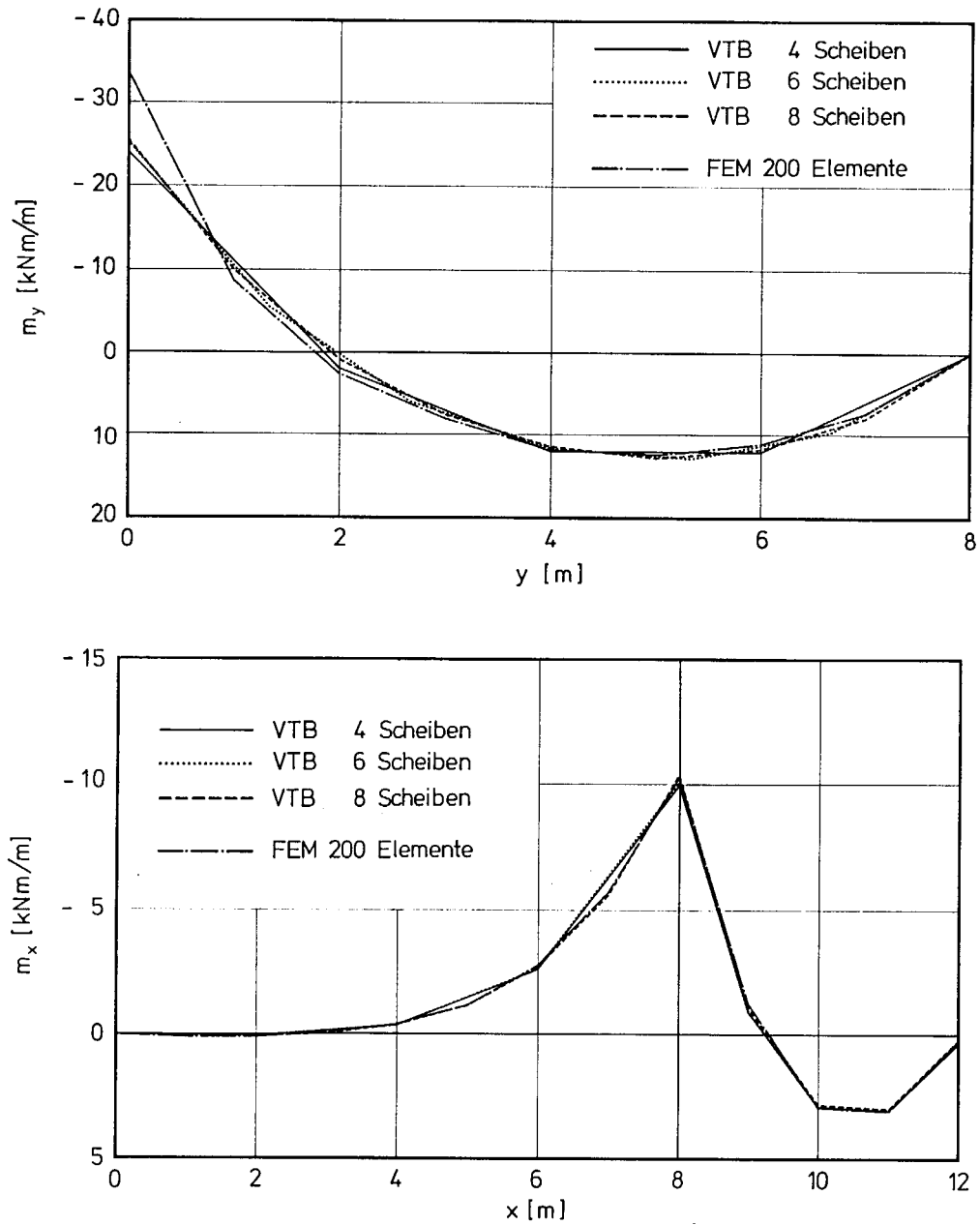


Bild 5.12 Verlauf der Plattenbiegemomente (Lastfall Gleichstreckenlast)
 oben: m_y über die Plattenbreite bei $x = 4\text{m}$
 unten: m_x über die Länge bei $y = 4\text{m}$

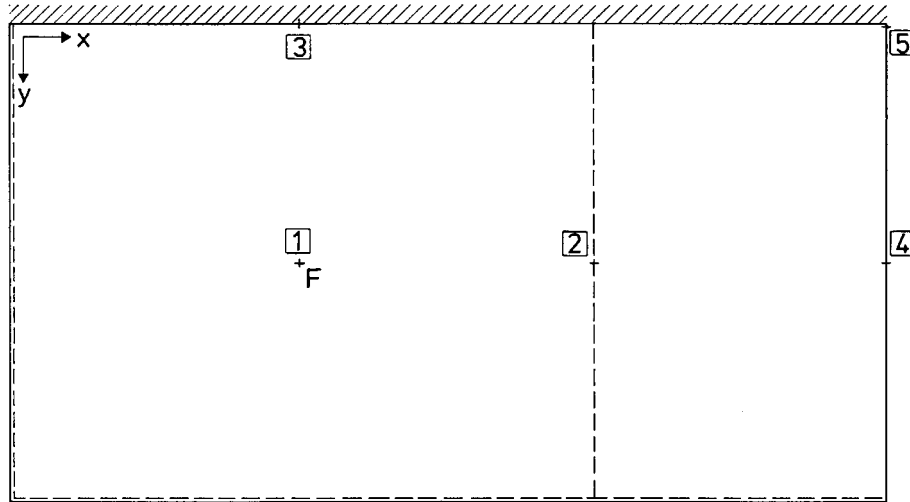
Bild 5.13 Lastfall Einzellast F

Tabelle 5.3 Gegenüberstellung der Ergebnisse aus VTB- und FEM-Berechnung an ausgewählten Punkten (Lastfall Einzellast)

		VTB			FEM	
		Anzahl der Scheiben			Anzahl der Elemente	
Pkt		4	6	8	48	200
1	w	0.574	0.576	0.588	0.656	0.606
	m_y	22.59	25.62	29.30	24.08	31.60
	m_x	27.96	34.73	34.91	23.31	30.87
2	m_x	-7.19	-6.94	-7.38	-7.33	-7.39
3	m_y	-13.95	-14.35	-14.17	-15.5	-17.4
4	w	-0.11	-0.11	-0.11	-0.11	-0.11
	m_y	-2.02	-1.91	-1.90	-2.20	-1.97
5	m_y	3.28	3.27	3.31	3.99	3.57

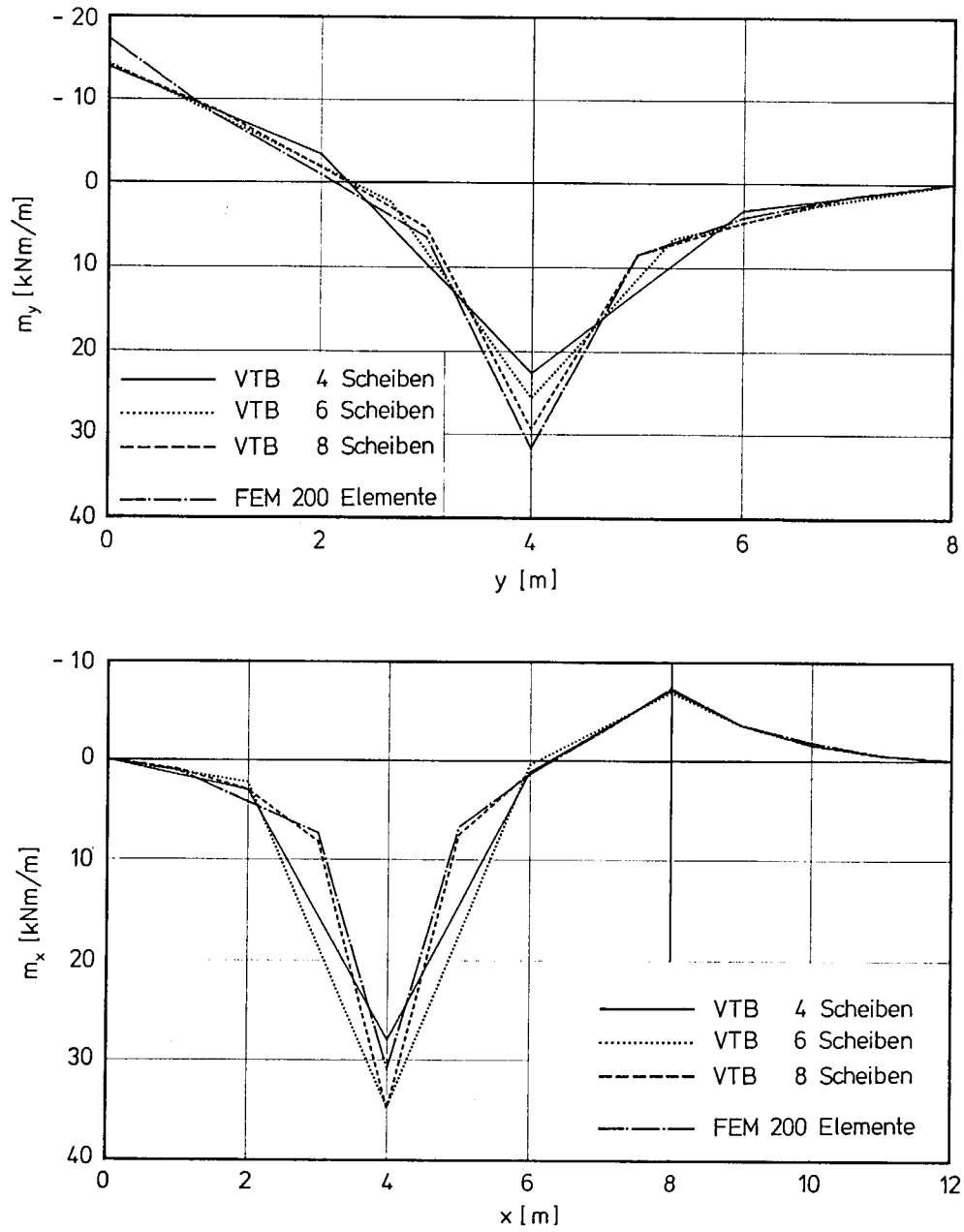


Bild 5.14 Verlauf der Plattenbiegemomente (Lastfall Einzellast)
 oben: m_y über die Plattenbreite entlang des freien Randes
 unten: m_x über die Länge bei $y = 4$ m

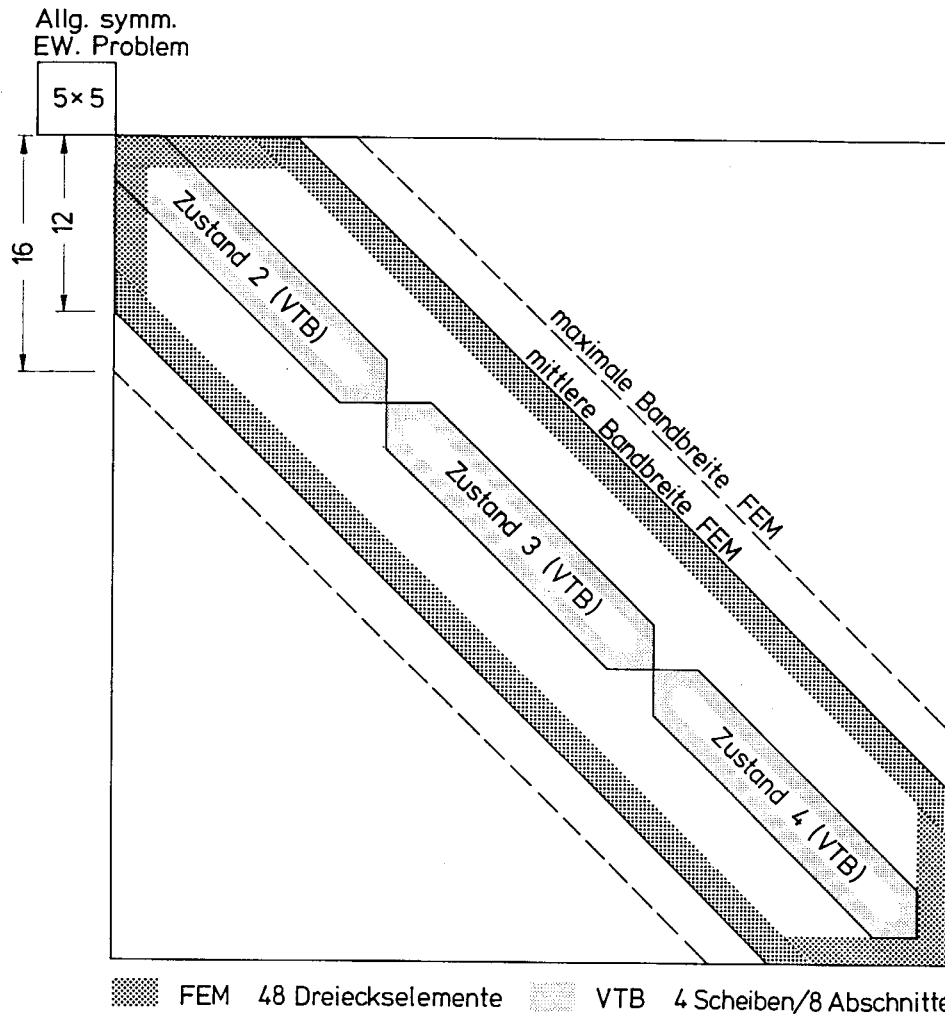


Bild 5.15 Vergleich des Rechenaufwandes bei VTB mit 4 Scheiben und FEM mit 48 Elementen anhand der Belegung der Gleichungssysteme